Exercice

Soit f la fonction dérivable, définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^x + \frac{1}{x}.$$

1. **Étude d'une fonction auxiliaire**

   a. Soit la fonction g dérivable, définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

   $$g(x) = x^2\mathrm{e}^x - 1.$$

   Étudier le sens de variation de la fonction g.

   b. Démontrer qu'il existe un unique réel a appartenant à $[0\ ;\ +\infty[$ tel que $g(a) = 0$.
   Démontrer que a appartient à l'intervalle $[0{,}703\,;\,0{,}704[$.

   c. Déterminer le signe de $g(x)$ sur $[0\ ;\ +\infty[$.

2. **Étude de la fonction f**

   a. Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.

   b. On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   Démontrer que pour tout réel strictement positif x, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

   c. En déduire le sens de variation de la fonction f et dresser son tableau de variation sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

   d. Démontrer que la fonction f admet pour minimum le nombre réel $m = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{a}$.

   e. Justifier que $3{,}43 < m < 3{,}45$.